Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής Γενικής Παιδείας

Απαντήσεις Θεμάτων Πανελληνίων Εξετάσεων Ημερησίων & Εσπερινών Επαγγελματικών Λυκείων (ΟΜΑΔΑ Α΄)

Θέμα Α

Α1. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ.81

Α2. α $\rightarrow$Σωστό

β $\rightarrow$Σωστό

γ $\rightarrow$Λάθος

δ $\rightarrow$Σωστό

ε $\rightarrow$Σωστό

Α3. α) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{\alpha}^{\beta} = \ln\beta - \ln\alpha$

β) $(g o f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

γ) $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = [cx]_{\alpha}^{\beta} = c(\beta - \alpha)$

Κ1: Κορίνθου 255
Κ2: Κανακάρη 99
τηλ. 2610 625360
fax 2610 625366
info@kapalearn.gr
www.kapalearn.gr

Θέμα Β

Χ:ημερήσιες ώρες διαβάσματος

$\nu = 25$ μαθητές

Β1.

Ισχύει:

$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5=\nu \Leftrightarrow 6+5+4+\kappa+2\kappa+1=25 \Leftrightarrow 16+3\kappa=25 \Leftrightarrow$

$3\kappa=9 \Leftrightarrow \boxed{\kappa=3}$

Β2. Για $\kappa=3$: $\nu_4=3,\ \nu_5=2\cdot 3+1=7$

- $N_1=\nu_1=6$

  $N_2=N_1+\nu_2=6+5=11$

  $N_3=N_2+\nu_3=11+4=15$

  $N_4=N_3+\nu_4=15+3=18$

  $N_5=\nu=25$

- $f_i\%=\frac{\nu_i}{\nu}\cdot 100\%=\frac{\nu_i}{25}\cdot 100\%=\nu_i\cdot 4\%$

  $f_1\%=\nu_1\cdot 4\%=24\%$

  $f_2\%=\nu_2\cdot 4\%=20\%$

  $f_3\%=\nu_3\cdot 4\%=16\%$

  $f_4\%=\nu_4\cdot 4\%=12\%$

  $f_5\%=\nu_5\cdot 4\%=28\%$

- $x_1\nu_1=1\cdot 6=6$

  $x_2\nu_2=2\cdot 5=10$

  $x_3\nu_3=3\cdot 4=12$

  $x_4\nu_4=4\cdot 3=12$

  $x_5\nu_5=5\cdot 7=35$

Και $\sum_{i=1}^{5} x_i\nu_i=6+10+12+12+35=75$

Κ1: Κορίνθου 255
Κ2: Κανακάρη 99
τηλ. 2610 625360
fax 2610 625366
info@kapalearn.gr
www.kapalearn.gr

Οπότε ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

x_i	v_i	N_i	$f_i\%$	x_iv_i
1	6	6	24	6
2	5	11	20	10
3	4	15	16	12
4	3	18	12	12
5	7	25	28	35
Σύνολο	25	-	100	75

Β3.

• $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_iv_i}{v} = \dfrac{75}{25} \Leftrightarrow \boxed{\bar{x} = 3 \text{ ώρες}}$

• αφού $v = 25$ (περιττός), $\delta = t_{13}$ (1)

Η t_{13} αντιστοιχεί στην $N_3 = 15$ και αφού η $N_2 = 11$ θα ισχύει:

$t_{12} = t_{13} = t_{14} = t_{15} = 3$

$(1) \Leftrightarrow \boxed{\delta = 3 \text{ ώρες}}$

Β4.

τουλάχιστον 3 ώρες ημερησίως $\to X \geq 3$

Το ποσοστό αυτών των μαθητών είναι: $f_3\% + f_4\% + f_5\% = (16+12+28)\% = \boxed{56\%}$

Θέμα Γ

$f : \Re \to \Re$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}, & \text{αν } x > 1 \\ \alpha x^2 + \beta x, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \Re$$

Γ1. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (\alpha x^2 + \beta x) = \alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 = \boxed{\alpha + \beta}$

Κ1: Κορίνθου 255
Κ2: Κανακάρη 99
τηλ. 2610 625360
fax 2610 625366
info@kapalearn.gr
www.kapalearn.gr

Γ2.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$, απροσδιόριστη μορφή διότι:

$\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1) = 1-1 = 0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x+3}-2\right) = \sqrt{1+3}-2 = 0$

Για x κοντά στο 1:

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2} = \frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4}$$

$$= \sqrt{x+3}+2$$

άρα: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x+3}+2\right) = \sqrt{4}+2 = \boxed{4}$

Γ3.

Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, θα ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \boxed{\alpha+\beta=4}$ (1)

και αφού η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$ θα ισχύει:

$f(-1) = 2 \Leftrightarrow \alpha\cdot(-1)^2 + \beta\cdot(-1) = 2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha-\beta=2}$ (2)

$(1)+(2) \Leftrightarrow 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=3}$

$(1) \Leftrightarrow 3+\beta = 4 \Leftrightarrow \boxed{\beta=1}$

Θέμα Δ

$f:\Re \to \Re$

$f(x) = 3x^2 - 2x - 1, \quad x\in\Re$

Δ1. Ο τύπος των παραγουσών της f κατά προσέγγιση σταθεράς είναι :

$F(x) = 3\dfrac{x^3}{3} - 2\dfrac{x^2}{2} - x + c \Leftrightarrow F(x) = x^3 - x^2 - x + c, \quad c\in\Re$ (1)

όμως $F(0) = 1 \Leftrightarrow \boxed{c=1}$

$(1) \Rightarrow \boxed{F(x) = x^3 - x^2 - x + 1, \quad x\in\Re}$

Κ1: Κορίνθου 255
Κ2: Κανακάρη 99
τηλ. 2610 625360
fax 2610 625366
info@kapalearn.gr
www.kapalearn.gr

Δ2. Η F είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, με :

$$F'(x) = f(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ ή } x = 1$$

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$$

$$F'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		↗		↘		↗	

Η F είναι γν. αύξουσα στο $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ και στο $[1, +\infty)$ και γν. φθίνουσα στο $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$.

Η F παρουσιάζει:

- τοπ. μέγιστο στο $x_1 = -\frac{1}{3}$, το: $F\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1$

$$= \frac{-1 - 3 + 9 + 27}{27} = \frac{32}{27}$$

και

- τοπ. ελάχιστο στο $x_2 = 1$, το: $F(1) = 1^3 - 1^2 - 1 + 1 = 0$

Δ3.

$2011, 2012 \in (1, +\infty)$ στο οποίο η F είναι γν. αύξουσα άρα:

$$2011 < 2012 \overset{F \text{ γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} F(2011) < F(2012)$$

Κ1: Κορίνθου 255
Κ2: Κανακάρη 99
τηλ. 2610 625360
fax 2610 625366
info@kapalearn.gr
www.kapalearn.gr

Δ4.

Στο $[0,1]$ η f είναι συνεχής και επίσης ισχύει $f(x)\le 0$ στο $[0,1]$ διότι $f(x)=F'(x)$.

Όμως στο ερώτημα $(\Delta 2)$ δείξαμε ότι $F'(x)\le 0$ στο $\left[-\frac{1}{3},1\right]$ άρα και στο $[0,1]$.

Οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^1 -f(x)dx=\int_0^1 (-3x^2+2x+1)dx=\left[-x^3+x^2+x\right]_0^1$$

$$=(-1+1+1)-0=\boxed{1\ \text{τ.μ}}.$$

Κ1: Κορίνθου 255
Κ2: Κανακάρη 99
τηλ. 2610 625360
fax 2610 625366
info@kapalearn.gr
www.kapalearn.gr