

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Απαντήσεις Θεμάτων Πανελληνίων Εξετάσεων Εσπερινών Γενικών Λυκείων

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο **σελίδα 30.**

A2. Σχολικό βιβλίο **σελίδα 13.**

A3. Σχολικό βιβλίο **σελίδα 59.**

A4.

- α. Σωστό**
- β. Σωστό**
- γ. Λάθος**
- δ. Λάθος**
- ε. Σωστό**

ΘΕΜΑ Β

B.1 Η $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 - 9x + 2)' = (x^3)' - (3x^2)' - (9x)' + (2)' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) \quad (1)$$

Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x όταν $x = 2$ είναι το $f'(2) = 3(4 - 4 - 3) = -9$

B.2

$$f'(x) = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 3$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	○	+
$f(x)$				
		TM	TE	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ και στο $[3, +\infty)$ και είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 3]$, οπότε στο -1 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 2 = -1 - 3 + 9 + 2 = 7$$

Για $x = 3$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 3 το

$$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 2 = 27 - 27 - 27 + 2 = -25$$

B.3

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 2 με $f'(2) = -9$ από το (B1) άρα η C_f στο $A(2, f(2))$ δέχεται εφαπτομένη με εξίσωση:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \quad (1) \quad \text{Όμως } f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 2 = 8 - 12 - 18 + 2 = -20$$

$$\text{Άρα η (1) γίνεται } y + 20 = -9(x - 2) \Leftrightarrow y + 20 = -9x + 18 \Leftrightarrow y = -9x - 2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1

X: πωλήσεις (σε χιλιάδες ευρώ)

Αφού έχουμε ισοπλατείς κλάσεις, το ύψος κάθε ορθογωνίου στο ιστόγραμμα συχνοτήτων είναι ίσο με τη συχνότητα κάθε κλάσης, άρα:

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 12 + 8 + 14 + 6 = 40 \text{ πωλητές}$$

Γ.2

κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i
$[2-4)$	3	12	0,3
$[4-6)$	5	8	0,2
$[6-8)$	7	14	0,35
$[8-10)$	9	6	0,15
Σύνολο	-	40	1

$$x_1 = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$x_2 = x_1 + c = 3 + 2 = 5$$

$$x_3 = x_2 + c = 5 + 2 = 7$$

$$x_4 = x_3 + c = 7 + 2 = 9$$

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{8}{40} = \frac{2}{10} = 0,2$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20} = \frac{3.5}{10} = 0,35$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20} = \frac{1.5}{10} = 0,15$$

Γ3.

α)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} = \frac{3 \cdot 12 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 14 + 9 \cdot 6}{40} = \frac{36 + 40 + 98 + 54}{40} = \frac{228}{40} = 5,7 \text{ χιλιάδες ευρώ.}$$

β)

Τουλάχιστον 4,5 χιλιάδες ευρώ:

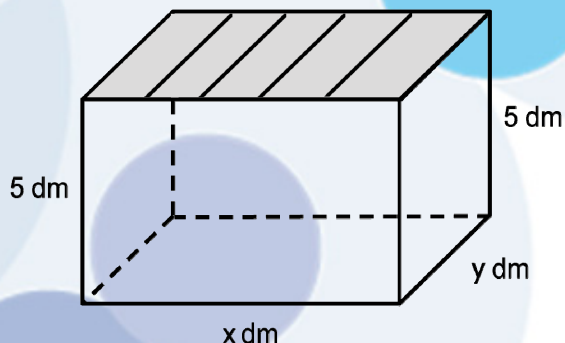
[4,5–6) και [6–8) και [8–10)

Για την [4,5–6) ισχύει ότι: $\frac{v_2}{c} = \frac{v_2'}{c'} \Leftrightarrow \frac{8}{2} = \frac{v_2'}{1,5} \Leftrightarrow v_2' = 4 \cdot 1,5 \Leftrightarrow v_2' = 6.$

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι: $v_2' + v_3 + v_4 = 6 + 14 + 6 = 26$ πωλητές

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1



Έστω y η άλλη πλευρά της βάσης, με $y > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Π}_{\text{βάσης}} &= 20\text{dm} \Leftrightarrow 2(x + y) = 20 \Leftrightarrow \\ x + y &= 10 \Leftrightarrow \boxed{y = 10 - x} \quad (1), \quad 0 < x < 10 \end{aligned}$$

Η επιφάνεια του κουτιού είναι:

$$\begin{aligned} E &= x \cdot y + 2 \cdot 5 \cdot y + 2 \cdot 5 \cdot x \quad (1) \\ E &= x \cdot (10 - x) + 10 \cdot (10 - x) + 10x \Leftrightarrow \\ E &= 10x - x^2 + 100 - 10x + 10x \Leftrightarrow \\ E(x) &= -x^2 + 10x + 100, \quad x \in (0, 10) \end{aligned}$$

Η E είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $(0, 10)$, ως πολωνυμική, με:

$$\begin{aligned} E'(x) &= (-x^2)' + (10x)' + (100)' \Leftrightarrow \\ E'(x) &= -2x + 10 \end{aligned}$$

$$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x + 10 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 10 \Leftrightarrow x \leq 5 \stackrel{x \in (0, 10)}{\Rightarrow} x \in (0, 5]$$

x	0	5	10
$E'(x)$	+	0	-
$E(x)$		$E(5)$	

μέγιστο

$$\left. \begin{array}{l} E'(5) = 0 \\ \text{Αφού } E'(x) > 0 \text{ στο } (0,5) \\ E'(x) < 0 \text{ στο } (5,10) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } E \text{ παρουσιάζει μέγιστο στο } x_0 = 5$$

Άρα η επιφάνεια του κουτιού γίνεται μέγιστη για $x = 5 \text{ dm}$

Δ2.

Αφού το κουτί έχει διαστάσεις $x \text{ dm}$, $y \text{ dm}$, 5 dm , ο όγκος του κουτιού είναι:

$$V = 5xy$$

Επειδή από Δ₁ $y = 10 - x$, έχω

$$V(x) = 5x(10 - x) = 50x - 5x^2, \quad x \in (0,10)$$

Η $V(x)$ παρ/ται στο $\mathcal{R}$ άρα και στο $(0,10)$

$$\text{με } V'(x) = (50x)' - (5x^2)' = 50 - 10x = 10(5 - x)$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 5 - x = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$V'(x) > 0 \stackrel{x \in (0,10)}{\Leftrightarrow} x \in (0,5)$$

$$\text{και } V'(x) < 0 \stackrel{x \in (0,10)}{\Leftrightarrow} x \in (5,10)$$

x	0	5	10
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$		μέγιστο	

Ο $V(x)$ γίνεται μέγιστος όταν $x = 5$.

Δ3.

Θεωρούμε 21 σημεία $A_i(x_i, y_i)$, $i=1,2,\dots,15$ με $y_i = E(x_i) = -x_i^2 + 10x_i + 100$ και $5 = x_1 < x_2 < \dots < x_{20} < x_{21} = 9$.

Για το δείγμα των τετμημένων ισχύει:

• δεν είναι ομοιογενές, άρα $CV > 10\%$ (1)

• $\bar{x} = 8$ (2)

• $2s^2 - 5s + 2 = 0$ (3)

α) (3) $\rightarrow \Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$ άρα $s_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}$, $s_1 = 2$, $s_2 = \frac{1}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow CV > \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} > \frac{1}{10} \Leftrightarrow s > \frac{\bar{x}}{10} \Leftrightarrow s > \frac{8}{10} \Leftrightarrow s > \frac{4}{5}$$

• $s_1 = 2 > \frac{4}{5}$, άρα δεκτή

• $s_2 = \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$, άρα απορρίπτεται

Οπότε: $\boxed{s = 2}$

β)

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v} \\ s^2 &= \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v x_i \right)^2}{v} \right\} \Leftrightarrow s^2 = \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v} - \left(\frac{\sum_{i=1}^v x_i}{v} \right)^2 \Leftrightarrow s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 \Leftrightarrow \overline{x^2} = s^2 + (\bar{x})^2 \Leftrightarrow \\ \overline{x^2} &= 2^2 + 8^2 \Leftrightarrow \overline{x^2} = 4 + 64 \Leftrightarrow \boxed{\overline{x^2} = 68} \end{aligned}$$