

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Απαντήσεις Θεμάτων Πανελληνίων Εξετάσεων Ημερησίων
Επαγγελματικών Λυκείων (ΟΜΑΔΑ Α')

ΘΕΜΑ Α

A.1 Ορισμός σχολικού βιβλίου

A.2 α) Σ

β) Λ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Σ

A.3 α) $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

β) $\int_a^b \sin x dx = \eta\mu\beta - \eta\mu\alpha$

γ) $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|$

ΘΕΜΑ Β

B.1

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \cdot f(x) - 2 \cdot f(x) = x^2 - 4, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow (x - 2) \cdot f(x) = x^2 - 4$$

$$\text{για } x \neq 2: f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

B.2

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 3} \text{ απροσδιοριστη μορφή διότι :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 2^2 - 4 = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = 2 - 3 = -1$$

$$\text{Για } x \neq 2: f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 3} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 3} = x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

B.3

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \neq 2 \\ \alpha, & x = 2 \end{cases}$$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = 2$, οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2}^{(B_2)} (x + 2) = f(2) \Leftrightarrow f(2) = 4$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1 Χ:ηλικίες των υπαλλήλων μιας εταιρείας

Ηλικίες υπαλλήλων	Συχνότητα v_i	Κέντρο κλάσης x_i	$x_i v_i$	Σχετική συχνότητα $f_i \%$
$[25, 35)$	100	30	3000	50
$[35, 45)$	50	40	2000	25
$[45, 55)$	40	50	2000	20
$[55, 65)$	10	60	600	5
ΣΥΝΟΛΟ	$v = 200$	-	7600	100

$$c = 10$$

Ο πίνακας συμπληρώθηκε ως εξής:

$$x_1 = \frac{25 + 35}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

$$x_2 = x_1 + c = 30 + 10 = 40$$

$$x_3 = x_2 + c = 40 + 10 = 50$$

$$x_4 = x_3 + c = 50 + 10 = 60$$

$$x_1 v_1 = 30 \cdot 100 = 3000$$

$$x_2 v_2 = 40 \cdot 50 = 2000$$

$$x_3 v_3 = 50 \cdot 40 = 2000$$

$$x_4 v_4 = 60 \cdot 10 = 600$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i v_i = 7600$$

$$f_1\% = \frac{v_1}{v} \cdot 100 = \frac{100}{200} \cdot 100 = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$$

$$f_2\% = \frac{v_2}{v} \cdot 100 = \frac{50}{200} \cdot 100 = \frac{1}{4} \cdot 100 = 25$$

$$f_3\% = \frac{v_3}{v} \cdot 100 = \frac{40}{200} \cdot 100 = \frac{1}{5} \cdot 100 = 20$$

$$f_4\% = \frac{v_4}{v} \cdot 100 = \frac{10}{200} \cdot 100 = \frac{1}{20} \cdot 100 = 5$$

$$\sum_{i=1}^4 f_i = 1$$

Γ.2

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i}{v} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{7600}{200} \Leftrightarrow \bar{x} = 38 \text{ έτη}$$

Γ.3

$$x \geq 45 \rightarrow [45, 55) \text{ και } [55, 65)$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι :

$$f_3\% + f_4\% = 20\% + 5\% = 25\% \text{ των υπαλλήλων}$$

Γ.4

Αφού αποχωρούν 5 υπάλληλοι της 4^{ης} κλάσης, η συχνότητά της θα γίνει: $v_4' = 10 - 5 = 5$

Αφού αποχωρούν 5 υπάλληλοι της 2^{ης} κλάσης, η συχνότητά της θα γίνει: $v_2' = 50 - 5 = 45$

Αφού προσλαμβάνονται 10 υπάλληλοι της 1^{ης} κλάσης, η συχνότητά της θα γίνει: $v_1' = 100 + 10 = 110$

$$v = v_1' + v_2' + v_3' + v_4' = 110 + 45 + 40 + 5 = 200$$

Η νέα μέση τιμή είναι :

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot v_1' + x_2 \cdot v_2' + x_3 \cdot v_3' + x_4 \cdot v_4'}{v}$$

$$\bar{x} = \frac{30 \cdot 110 + 40 \cdot 45 + 50 \cdot 40 + 60 \cdot 5}{200}$$

$$\bar{x} = \frac{3300 + 1800 + 2000 + 300}{200}$$

$$\bar{x} = \frac{7400}{200}$$

$$\bar{x} = 37 \text{ \textbf{έτη}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1

$$f(x) = e^x \cdot (x-1), \quad x \in \mathbb{R}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεων, με:

$$f'(x) = (e^x)' \cdot (x-1) + e^x \cdot (x-1)' = e^x \cdot (x-1) + e^x = f(x) + e^x$$

Δ.2

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (x-1) + e^x = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (x-1+1) = 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} \boxed{x=0}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x \cdot x > 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} \boxed{x > 0}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\circ$	+
$f(x)$		$f(0)$	
		Ο.Ε.	

- Αφού η $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$, η f είναι  στο $(-\infty, 0]$ και αφού $f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, η f είναι  στο $[0, +\infty)$
- Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = e^0 \cdot (0-1) = 1 \cdot (-1) = -1$

Δ.3

$$g(x) = f(x) + e^x \stackrel{(\Delta_1)}{\Leftrightarrow} g(x) = f'(x)$$

$$E(\Omega) = \int_{-1}^1 |g(x)| dx = \int_{-1}^1 |f'(x)| dx \quad (1)$$

Από (Δ_2) βλέπουμε το πρόσημο της παραγώγου που αλλάζει στο 0, οπότε :

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow E(\Omega) &= \int_{-1}^0 (-f'(x)) dx + \int_0^1 f'(x) dx \\ &= [-f(x)]_{-1}^0 + [f(x)]_0^1 \\ &= [-e^x \cdot (x-1)]_{-1}^0 + [e^x \cdot (x-1)]_0^1 \\ &= -e^0 \cdot (0-1) + e^{-1} \cdot (-1-1) + e^1 \cdot (1-1) - e^0 \cdot (0-1) \\ &= -1 \cdot (-1) + e^{-1} \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \\ &= 1 - \frac{2}{e} + 1 \\ &= 2 - \frac{2}{e} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$